

Rappel: Théorème des 2 gendarmes.

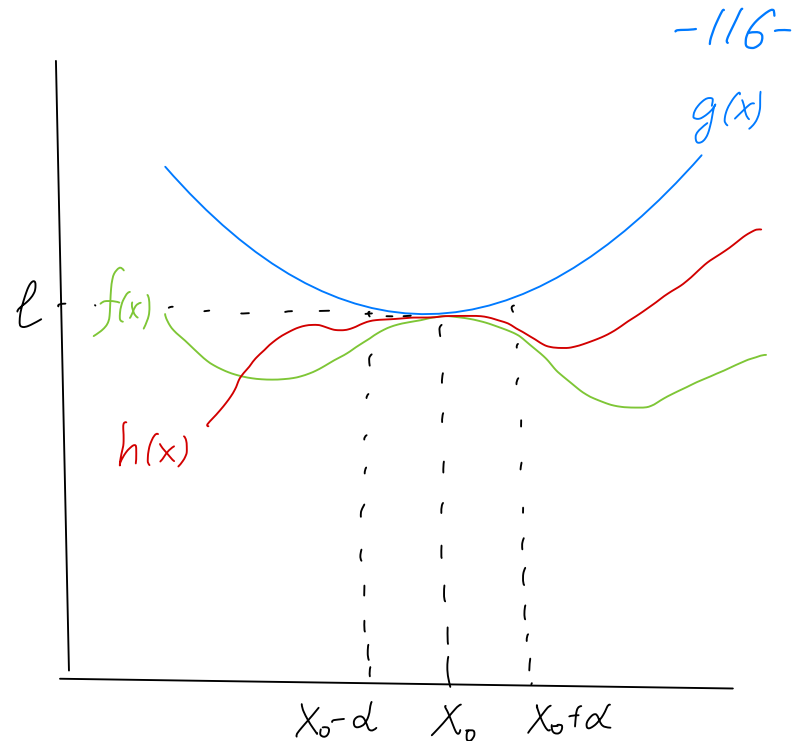
Soient $f, g, h : E \rightarrow F$ trois fonctions telles que

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

$$(2) \exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}, \text{ on a}$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$



Exemple important: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$$

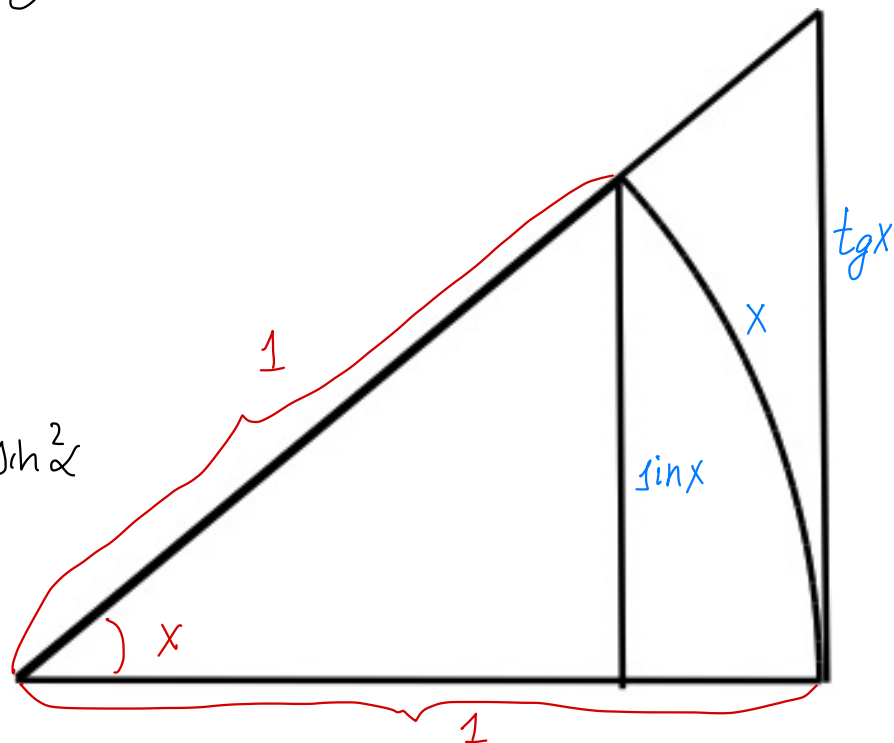
$$1 \leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \frac{1}{|\cos x|}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \quad x \text{ proche à } 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x ?$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$$

$$\underline{|1 - \cos x| = 2 \left| \sin^2 \frac{x}{2} \right| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}$$



$$\begin{array}{ccc}
 0 & \leq |1 - \cos x| \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 & \\
 x \rightarrow 0 \downarrow & & \downarrow x \rightarrow 0 \\
 0 & & 0
 \end{array}
 \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} & \\
 x \rightarrow 0 \downarrow & & \downarrow x \rightarrow 0 \\
 1 & & 1
 \end{array}
 \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Théorème Limite de la composée des 2 fonctions.

Soit $f: E \rightarrow F$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$; $g: G \rightarrow H$, $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$.

Supposons que $f(E) \subset G$ et $\exists \alpha > 0 : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \neq y_0$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l$.

Dém: $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |y - y_0| \leq \delta_1 \Rightarrow |g(y) - l| \leq \varepsilon$

Aussi, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Rightarrow \text{pour } \delta_1 > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \delta_1$

-118-

Soit $\delta = \min \{\alpha, \delta_2\} \Rightarrow \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - y_0| \leq \delta_1$
 et $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \neq y_0$ ↑
 $\Rightarrow |g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$. □

Ce théorème nous permet de changer des variables dans les limites.

Ex 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2 + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x^2 + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \xrightarrow{\text{red}} 1}{3 + \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\xrightarrow{\text{red}} 1}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $y = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 1} \frac{2y}{3+y} = \frac{1}{2}$

Exercice. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 > 0$ (Avec ε et δ)

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \varepsilon ; \text{ puisque } \varepsilon > 0 \Rightarrow \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right| \Rightarrow$$

$$\text{Si on pose } \delta = \varepsilon \sqrt{x_0} \Rightarrow |x - x_0| \leq \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right|}_{\leq \delta = \varepsilon \sqrt{x_0}} \leq \frac{\varepsilon \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon \Rightarrow \text{par la déf,}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ □

Ex 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 1}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)(2-x)}{x-2} \frac{\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}$

-119-

Soit $g(y) = \sqrt{y}$; $f(x) = \begin{cases} x+2 \\ 2x \\ x-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} 4 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)} =$

$\lim_{y \rightarrow y_0} \sqrt{y} = \sqrt{y_0}$

$= \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$ par le Thm.

Ex 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{x^3 - x^2 - x + 1} =$

$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2} \right) \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

$x \rightarrow 1 \rightarrow 1$

$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 \Rightarrow g(y) = \frac{\sin y}{y} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = 1$

Remarque. Par le Thm, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(t(x))}{t(x)} = 1$ si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$ et $\exists$ un voisinage de $x=a$ t.g. $t(x) \neq 0$.

Ex 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Il suffit de trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

$$\text{Soit } a_n = \frac{1}{2\pi n}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$$

$$\sin \frac{1}{a_n} = \sin(2\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

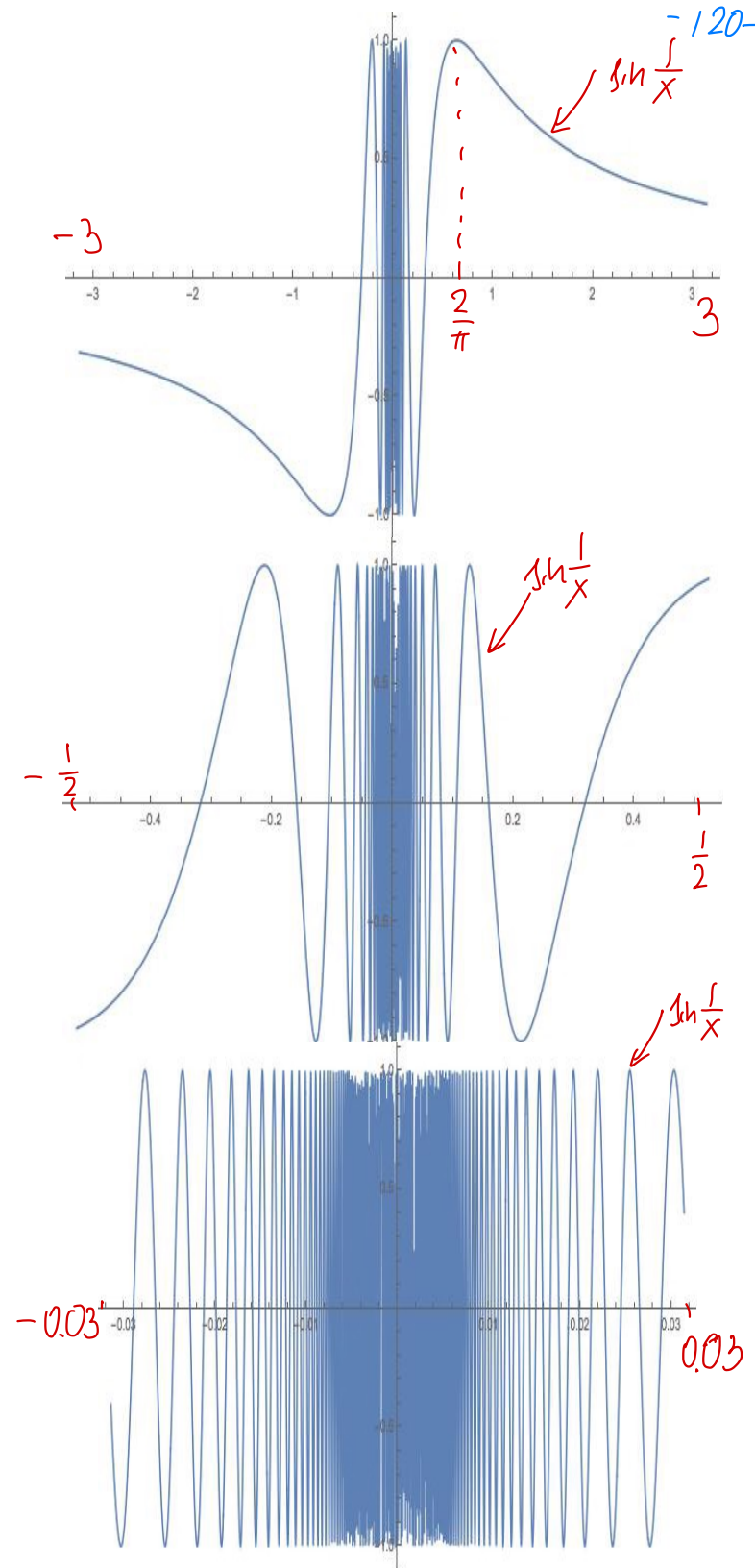
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0.$$

$$\text{Soit } b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\sin \frac{1}{b_n} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ par la caractérisation à partir des suites,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.



Ex 5. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

On a: $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

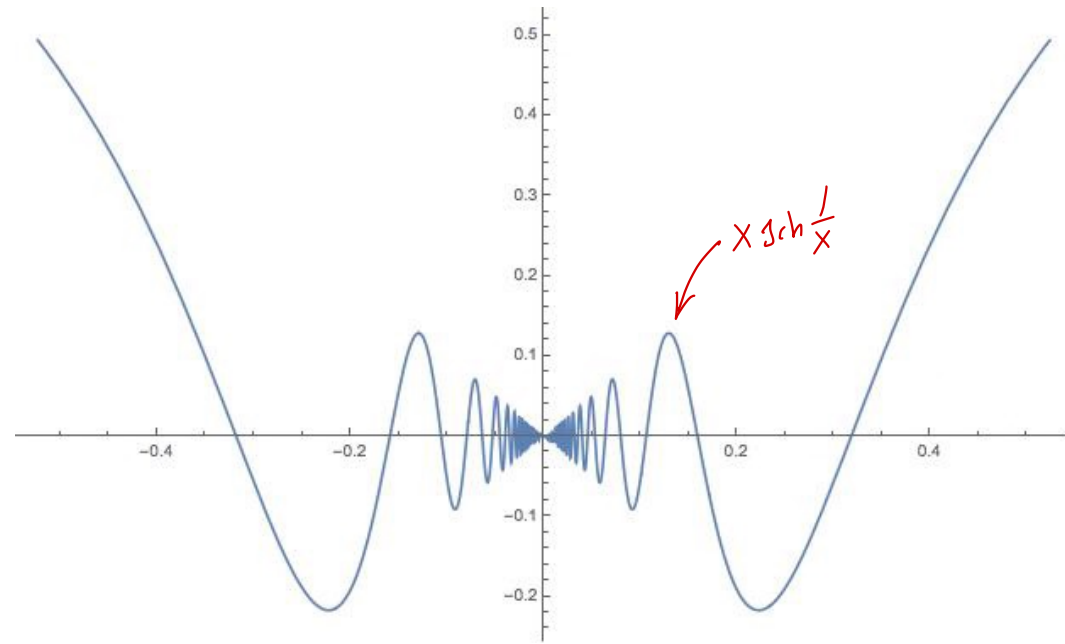
multiplier par $|x| > 0$ si $x \neq 0$

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow 0 & \downarrow & \\ 0 & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \downarrow & x \rightarrow 0 \\ & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0}$$



Limites lorsque x tend vers $\pm \infty$

-122-

Déf $f: E \rightarrow F$ est définie au voisinage de $+\infty$ ($-\infty$) si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$:
 $]\alpha, +\infty[\subset E$ (resp. $]-\infty, \alpha[\subset E$).

Déf $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $+\infty$ ($-\infty$) admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers $+\infty$ ($-\infty$) si $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R}$:

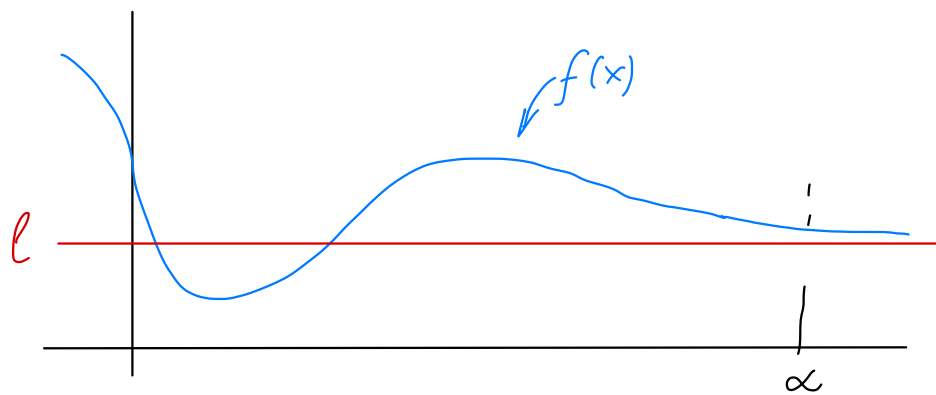
$$\forall x \in E : x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{resp. } \forall x \in E : x \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$



Dans ce cas on dit que la fonction f admet une asymptote horizontale $y=l$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$).

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Dém. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\alpha \in \mathbb{R}$: $\forall x \geq \alpha, \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq x^2, \quad x \rightarrow \infty, \text{ on suppose } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq x. \quad \text{On pose } \alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \text{Si } x \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{par la déf. : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Limites infinies.

-123-

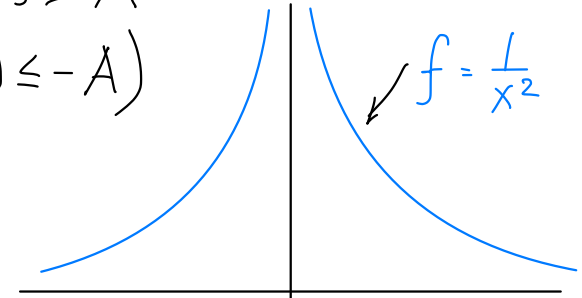
Déf $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ ($-\infty$)

lorsque $x \rightarrow x_0$ si $\forall A > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$
($f(x) \leq -A$)

Notation:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



Ex $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Dém. Soit $A > 0$, il faut trouver

$$\delta > 0 : 0 < |x| \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq A \Rightarrow \frac{1}{|x|} \geq \sqrt{A} \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}, \text{ on pose } = \delta$$

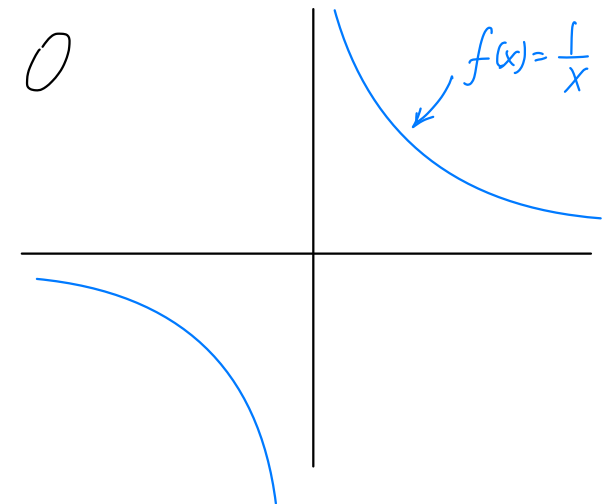
$$\text{Si } |x| \leq \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq A \Rightarrow \text{par la déf, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Ex. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. Dans tout voisinage de 0

il existent x_1, x_2 tels que $x_1 < 0 < x_2$

et pour un $M > 0$, on a $\frac{1}{x_1} < -M$ et

$$\frac{1}{x_2} > M$$



Déf. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ tend vers $\pm\infty$
lorsque $x \rightarrow +\infty$ si
($x \rightarrow -\infty$)

$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq \alpha, \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$(f(x) \leq -A)$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq \alpha, \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$(f(x) \leq -A)$$

Notations:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

On a défini 4 types de limites:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Tous les résultats obtenus pour $\lim_{x \rightarrow x_0}$ restent valables pour $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ [DZ, § 4.2.18]

Formes indéterminées.

$\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \cdot \infty$; $0^0, 1^\infty, \infty^0$ ⁻¹²⁵⁻
plus tard

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$ ^{$\infty - \infty$} $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{2}{x}} + x}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1)}$ $= 1.$
Annotations:
- Under $\sqrt{x^2}$: $x > 0 \Rightarrow |x| = x$
- Under $\frac{2}{x}$: $\rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x)$ ^{$\infty - \infty$} $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{2}{x}} - x} =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1)}$ $= -1$
Annotations:
- Under $\frac{2}{x}$: $\rightarrow 0$
- Under $\sqrt{x^2}$: $|x| = -x$
- Below: $x < 0$

$\sqrt{x^2} = |x|.$